Bevis for den associative lov for foldning

Vi har følgende definition:

Definition - Kontinuert foldning

Givet to kontinuerte funktioner $f(x)$ og $g(x)$, så defineres foldningen af *f* og *g* som:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot g(t-x)\,dx$$

Foldningen af *f* og *g* betegnes således med en asterix: $f * g$

Vi ønsker at vise nr 2 af regnereglerne:

Sætning: Regneregler for foldning

For alle integrable funktioner gælder følgende regneregler for foldning:

- Den kommutative regel, dvs: $f * g = g * f$
- Den associative regel, dvs: $(f * g) * h = f * (g * h)$
- Den distributive regel, dvs $f * (g+h) = f * g + f * h$

Vi opskriver venstre side af udtrykket ved at anvende definitionen to gange:

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) \cdot h(t-x)\,dx && \text{def. på } ((f * g) * h)(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cdot g(x-z)\,dz \right) \cdot h(t-x)\,dx && \text{def. på } (f * g)(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cdot g(x-z) \cdot h(t-x)\,dz \right) dx && h(t-x) \text{ er konstant ift variablen } z \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cdot g(x-z) \cdot h(t-x)\,dx \right) dz && \text{Fubinis sætn. om ombytn. af int.} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x-z) \cdot h(t-x)\,dx \right) dz && f(z) \text{ er konstant ift variablen } x \text{ (!)}
\end{aligned}$$

Vi betragter nu udtrykket i parentesen: $\int_{-\infty}^{\infty} g(x-z) \cdot h(t-x)\,dx$,

Og foretager følgende substitution:

$$y = x - z, \text{ hvoraf } dy = dx$$

Vi finder et udtryk for $t - x$:

$$y = x - z \Leftrightarrow x = y + z$$

Hvoraf: $t - x = t - (y+z) = t - y - z = (t-z) - y$

Indsæt i integralet:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g(x-z) \cdot h(t-x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \cdot h((t-z)-y)\,dy \\
&= (g * h)(t-z)
\end{aligned}$$

Indsæt i (!): $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x-z) \cdot h(t-x)\,dx \right) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cdot (g * h)(t-z)\,dz$

Men dette er jo pr definition: $(f * (g * h))(t)$, dvs udregningerne fra start til slut viser

$$(f * g) * h = f * (g * h) \text{, som er den associative lov}$$